

- 1) Niech $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa. Zbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V jeśli jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych oraz $\text{lin } B = V$ (każdy wektor z V jest skończoną kombinacją liniową wektorów z B).
- 2) **Reperem bazowym** danej przestrzeni wektorowej V nazywamy dowolną jej bazę, w której ustalono kolejność wektorów.
- 3) Niech $B = (e_1, \dots, e_n)$ będzie reperem bazowym przestrzeni wektorowej $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Dla dowolnego wektora $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V$ skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ nazywamy **współrzednymi wektora v względem bazy B** , co zapisujemy $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_B$. W danej bazie współrzedne są wyznaczone jednoznacznie.
- 4) Niech B będzie dowolną bazą przestrzeni wektorowej V .
 - a) Jeśli B jest zbiorem skończonym, to mówimy, że V jest przestrzenią skończenie wymiarową, a liczbę wektorów w bazie B nazywamy **wymiarem** przestrzeni V i oznaczamy $\dim V$.
 - b) Jeśli B składa się z nieskończonej liczby wektorów, to mówimy, że V jest nieskończenie wymiarowa i piszemy $\dim V = \infty$.
 - c) Jeśli $V = \{\vec{0}\}$, to przyjmujemy $\dim V = 0$.
- 5) Niech V - przestrzeń wektorowa skończenie wymiarowa, $\dim V < \infty$, $U \subset V$ - podprzestrzeń wektorowa. Wtedy $\dim U \leq \dim V$ oraz $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.
- 6) Niech $V(\mathbb{K})$ - przestrzeń wektorowa, $\dim V = k \in \mathbb{N}$. Wtedy:
 - a) Każdy układ k wektorów generujących V jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.
 - b) Każdy układ k wektorów liniowo niezależnych generuje V .
- 7) Jeśli V_1, V_2 - podprzestrzenie wektorowe przestrzeni V , to $V_1 \cap V_2$ też jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V .
- 8) Jeśli V_1, V_2 - podprzestrzenie wektorowe przestrzeni V , to:

$$V_1 \cup V_2 \text{ - jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni } V \Leftrightarrow V_1 \subset V_2 \vee V_2 \subset V_1.$$

Zadanie 1. Zbadaj, czy podany zbiór wektorów tworzy bazę przestrzeni V :

- a) $B = \{(-2, 3, 2), (1, -2, 1), (1, -2, 3)\}$, $V = \mathbb{R}^3$,
- b) $B = \{2x + 4, 3x - x^2, -2x^2 + 4x - 4\}$, $V = \mathbb{R}[x]_2$,
- c) $B = \{(1 + i, -2, -i), (2 - i, 2, i), (-1 + i, i, 2)\}$, $V = \mathbb{C}^3(\mathbb{C})$,
- d) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Zadanie 2. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni wektorowych:

- a) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0, 4x - 3y - 2z + t = 0\}$,
- b) $V = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(x + 1) + p(-x) = 0\}$,
- c) $V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\}$,
- d) $V = \text{lin}\{1, x, \cos^2 x, \cos 2x, \sin^2 x\}$.

Zadanie 3. Znajdź bazę przestrzeni:

- a) $\mathbb{R}[x]_5$ zawierającą wektory $1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5$,
- b) $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ zawierającą wektory $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B :

- a) $B = ((2, 1, 1), (3, 2, 1), (1, 1, 1))$, $v = (1, -2, -1)$,
- b) $B = (-x^3 - x^2 + 1, x^3 + 3x^2 - x, x^2 - 1, 2x^3 - 2x + 5)$, $v(x) = x^3 + x^2 + x - 3$,
- c) $B = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$, $v = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5. Niech $B = (u, v, w)$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$. Wiedząc, że $u = (-1, 1, 2)$ dobierz wektory v oraz w takie, by wektory $s = (1, -4, 5)$ oraz $t = (-7, 14, -11)$ miały w tej bazie współrzędne odpowiednio $[2, 1, -4]_B$ oraz $[0, 2, 5]_B$.

Zadanie 6. Niech $B = (v_1, v_2, v_3)$ będzie bazą w przestrzeni V . Czy wektory u_1, u_2, u_3 stanowią bazę V jeśli wiadomo, że:

- a) $u_1 = [2, -1, 0]_B, u_2 = [-1, 2, -1]_B, u_3 = [1, -1, -1]_B$,
- b) $u_1 = [2, 1, 3]_B, u_2 = [1, 1, 1]_B, u_3 = [-2, -2, 3]_B$,
- c) $u_1 = [0, -5, 1]_B, u_2 = [1, -3, 1]_B, u_3 = [3, 2, 1]_B$.

Jeśli tak, wyznacz współrzędne wektora $w = [1, 2, 1]_B$ w tej bazie.